Valeurs propres, vecteurs propres
Diagonalisation

Valeurs propres, vecteurs propres

Définition. *Soit la matrice carrée $A : n \times n$ et le système*

$$A\vec{x} \;=\; \lambda\vec{x} \tag{1}$$

où λ est un paramètre.
On appelle valeur propre de A une valeur de λ pour laquelle le système (1) admet des solutions non triviales $\vec{x} \neq \vec{0}$.
On appelle vecteurs propres associés à la valeur propre λ ces solutions non triviales.

Le système (1) s'écrit encore $A\vec{x} = \lambda I\vec{x}$ soit

$$(A - \lambda I)\,\vec{x} = \vec{0}$$

Il a donc des solutions non triviales si et seulement si

$$\det\,(A - \lambda I) = 0 \tag{2}$$

On appelle équation caractéristique l'équation (2) et polynôme caractéristique de A son membre de gauche $\det\,(A - \lambda I)$.

Le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n en λ. Il possède donc exactement n zéros réels ou complexes, simples ou multiples.

A possède donc au plus n valeurs propres distinctes.

L'ensemble des solutions du système (1) associé à une valeur propre réelle λ de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ appelé sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

Exemples.

1. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Polynôme caractéristique :

$$\det\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

L'équation caractéristique

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

a deux racines -1 et 4.

Valeurs propres :

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4$$

Vecteurs propres :

ce sont les solutions non-triviales du système $(A - \lambda I)\,\vec{x} = \vec{0}$

(a) pour $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 3 & 2-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{array} \quad \text{soit} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & -s \\ x_2 & = & s \end{array}, \; s \in \mathbb{R}$$

d'où les vecteurs propres $s\vec{v}_1$ avec $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}_\star$

(b) pour $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{bmatrix} 1-(4) & 2 \\ 3 & 2-(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

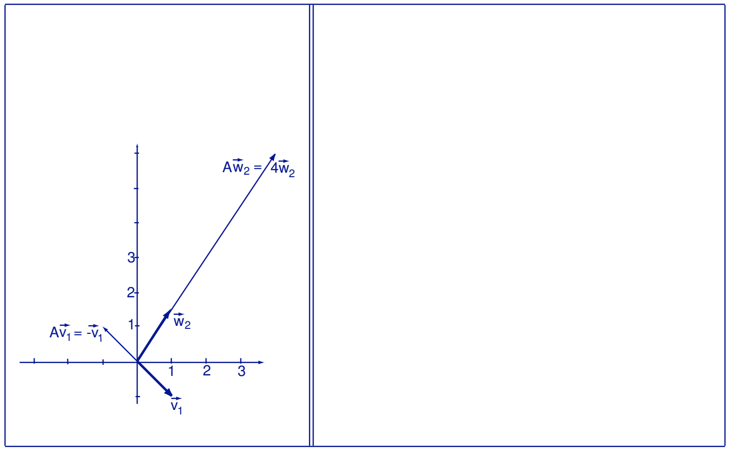
$$\begin{array}{rcl} -3x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ 3x_1 - 2x_2 & = & 0 \end{array} \quad \text{soit} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{2}{3}t \\ x_2 & = & t \end{array}, \; t \in \mathbb{R}$$

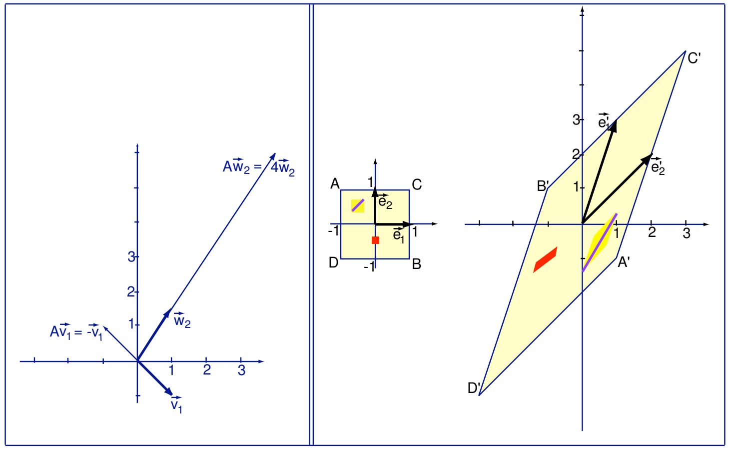
d'où les vecteurs propres $t\vec{v}_2$ avec $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}_\star$

Interprétation géométrique.

Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{F} : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} & \rightarrow & \mathrm{F}(\vec{x}) = A\vec{x} \end{array}$$





2. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polynôme caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

L'équation caractéristique $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ a une racine double valant 1.

Valeurs propres : A a une seule valeur propre :

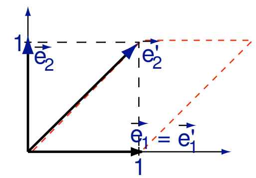
$$\lambda = 1$$

Vecteurs propres : ce sont les solutions non-triviales du système $(A - \lambda I)\,\vec{x} = \vec{0}$ pour $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1-(1) & 1 \\ 0 & 1-(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 0x_1 + 1x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{array} \quad \text{soit} \quad \begin{array}{l} x_1 = s \\ x_2 = 0 \end{array}, \; s \in \mathbb{R}$$

d'où les vecteurs propres $s\vec{v}$ avec $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}_\star$



3. Rotation dans le plan. Soit

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Polynôme caractéristique :

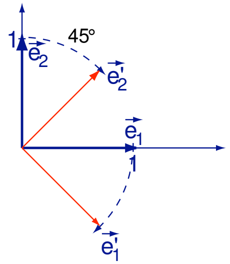
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda)^2 + \frac{1}{2}$$

L'équation caractéristique $\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1 = 0$ n'a pas de racines réelles mais deux racines complexes conjuguées.

Valeurs propres : A a deux valeurs propres conjuguées complexes :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$$

Vecteurs propres : Dans une rotation du plan, aucun vecteur ($\neq \vec{0}$) ne garde sa direction...



Diagonalisation

Définition. *La matrice $A : n \times n$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $P : n \times n$ et une matrice diagonale $\Lambda : n \times n$ telles que*

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

Interprétation. La matrice A peut être vue comme la matrice d'une transformation linéaire

$$\begin{aligned} \mathrm{F} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\to \mathrm{F}(\vec{x}) = A\vec{x} \end{aligned}$$

A est alors la matrice de la transformation par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$[\mathrm{F}(\vec{x})]_{\mathbf{BC}} = A\,[\vec{x}]_{\mathbf{BC}}$$

P peut être interprétée comme une matrice de changement de base, de la base $\mathbf{B}$ vers la base $\mathbf{BC}$:

$$[\vec{y}]_{\mathbf{BC}} = P\,[\vec{y}]_{\mathbf{B}} \;\; \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

Alors Λ est la matrice de ta transformation par rapport à la base $\mathbf{B}$. En effet

$$\begin{aligned} [\mathrm{F}(\vec{x})]_{\mathbf{B}} &= P^{-1}\,[\mathrm{F}(\vec{x})]_{\mathbf{BC}} = P^{-1}A\,[\vec{x}]_{\mathbf{BC}} = P^{-1}AP\,[\vec{x}]_{\mathbf{B}} = \\ &= \Lambda\,[\vec{x}]_{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

Diagonaliser A revient ainsi à chercher une base $\mathbf{B}$ par rapport à laquelle la transformation F est décrite par une matrice diagonale.

Théorème. *Une matrice $A : n \times n$ est diagonalisable si et seulement si elle possède n vecteurs propres linéairement indépendants.*

Pr. On a A diagonalisable $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists P,\ P^{-1}$ et Λ avec $P^{-1}AP = \Lambda$
$\Leftrightarrow \exists P$ et Λ avec $AP = P\Lambda$ et P est inversible

$$\Leftrightarrow \exists P = \begin{bmatrix} \vec{p}_1 & \dots & \vec{p}_n \end{bmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ avec}$$

$$\begin{bmatrix} A\vec{p}_1 & \dots & A\vec{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{p}_1 & \dots & \lambda_n\vec{p}_n \end{bmatrix}$$

et P est inversible
$\Leftrightarrow$ $\exists n$ vecteurs propres, $\vec{p}_i$ associé à la valeur propre λ_i, $i = 1, \dots, n$, et $\{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\}$ est linéairement indépendant. $\square$

Exemple Soit la matrice de l'exemple 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

On a trouvé les valeurs propres -1 et 4
et les vecteurs propres correspondants :

– pour $\lambda_1 = -1$: $\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

– pour $\lambda_2 = 4$: $\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\{\vec{p}_1, \vec{p}_2\}$ est linéairement indépendant et avec $P = \begin{bmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 \end{bmatrix}$ on

obtient

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Théorème. *Les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.*

Pr. Par l'absurde : Soit $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ une collection minimale de valeurs propres distinctes de A conduisant à un ensemble de vecteurs propres $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}$ linéairement dépendant. Alors il existe des constantes $c_1, c_2, \dots, c_k$, toutes $\neq 0$, avec

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_k\vec{x}_k = \vec{0}$$

et ainsi

$$c_1A\vec{x}_1 + c_2A\vec{x}_2 + \dots + c_kA\vec{x}_k = A\vec{0} = \vec{0}$$
$$c_1\lambda_1\vec{x}_1 + c_2\lambda_2\vec{x}_2 + \dots + c_k\lambda_k\vec{x}_k = \vec{0}$$

mais d'autre part, en multipliant la première équation par λ_1 on obtient aussi

$$c_1\lambda_1\vec{x}_1 + c_2\lambda_1\vec{x}_2 + \ldots + c_k\lambda_1\vec{x}_k = \vec{0}$$

et en soustrayant cette équation de la précédente

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \ldots + c_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{x}_k = \vec{0}$$

Ainsi l'ensemble $\{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$est linéairement dépendant, en contradiction avec la minimalité de la collection. $\square$

Remarque. Le théorème précédent fournit une condition suffisante pour la diagonalisabilité d'une matrice. Mais cette condition n'est pas nécessaire !

Diagonalisation orthogonale

Définition. *La matrice $P : n \times n$ est dite orthogonale si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien.*
On a ainsi

$$P^T P = I$$

Propriétés. Il découle de la définition que

$$P^{-1} = P^T$$

$$\det(P) = \pm 1$$

Selon la valeur de $\det(P)$ on a

- $\det(P) = +1$: P est la matrice d'une rotation.
- $\det(P) = -1$: P est la matrice d'une rotation suivie d'une symétrie.

Définition. *La matrice $A : n \times n$ est dite orthogonalement diagonalisable s'il existe une matrice P orthogonale qui la diagonalise, c'est-à-dire s'il existe P telle que*

$$P^T A P = \Lambda$$

avec $P^T P = I$ et Λ matrice diagonale.

Théorème. *Pour toute matrice $A : n \times n$ les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *A est orthogonalement diagonalisable.*
2. *A est symétrique.*

Pr.

- 1. $\Rightarrow$2. On a $A = P\Lambda P^T$. Alors

$$A^T = \left(P\Lambda P^T\right)^T = \left(P^T\right)^T \Lambda^T P^T = P\Lambda P^T = A$$

- 2. $\Rightarrow$1. On ne démontrera ici l'implication que pour le cas particulier où A possède n valeurs propres distinctes. Elle est cependant valable pour toute matrice symétrique.
  On utilise les deux lemmes suivants :

Lemme 1. *Soit la matrice symétrique $A : n \times n$. Alors les valeurs propres de A sont toutes réelles.*

Pr. L'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$ a tous ses coefficients réels. Ses racines sont donc soit réelles, soit elles apparaissent par paires conjuguées-complexes. On montre que ce dernier cas n'est pas possible :
Soit λ et $\overline{\lambda}$ une telle paire et $\vec{x}$ et $\overline{\vec{x}}$ la paire de vecteurs propres conjugués-complexes associés. On a $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ et $A\overline{\vec{x}} = \overline{\lambda\vec{x}}$.
Prenant la transposée de la deuxième équation on obtient $\left(A\overline{\vec{x}}\right)^T = \overline{\vec{x}}^T A = \overline{\lambda\vec{x}}^T$.
Multipliant la première équation par $\overline{\vec{x}}^T$ on obtient $\overline{\vec{x}}^T A\vec{x} = \lambda\overline{\vec{x}}^T\vec{x}$.
Combinant ces deux résultats, il vient $\overline{\vec{x}}^T A\vec{x} = \overline{\lambda}\overline{\vec{x}}^T\vec{x} = \lambda\overline{\vec{x}}^T\vec{x}$.

D'où $\left(\overline{\lambda} - \lambda\right)\overline{\vec{x}}^T\vec{x} = 0$ et donc $\overline{\lambda} = \lambda$ car $\overline{\vec{x}}^T\vec{x} = |\vec{x}|^2 \neq 0$. $\square$

Lemme 2. *Soit la matrice symétrique $A : n \times n$, λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de A, $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ des vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 respectivement.*
Alors $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ sont orthogonaux, c'est-à-dire $\vec{p}_1^T\vec{p}_2 = 0$.

Pr. On a $A\vec{p}_1 = \lambda_1\vec{p}_1$ et $A\vec{p}_2 = \lambda_2\vec{p}_2$. Utilisant les mêmes manipulations que précédemment, il vient
$\vec{p}_2^T A\vec{p}_1 = \vec{p}_2^T(A\vec{p}_1) = \vec{p}_2^T\lambda_1\vec{p}_1 = \lambda_1\vec{p}_2^T\vec{p}_1$ d'une part,
et d'autre part
$\vec{p}_2^T A\vec{p}_1 = (\vec{p}_2^T A)\vec{p}_1 = \lambda_2\vec{p}_2^T\vec{p}_1$. D'où
$(\lambda_2 - \lambda_1)\,\vec{p}_2^T\vec{p}_1 = 0$ et donc $\vec{p}_2^T\vec{p}_1 = 0$ puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\square$

(Fin de la preuve du théorème) Soit A symétrique aux valeurs propres $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ et $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n$ des vecteurs propres correspondants, qu'on supposera normés ($\|\vec{p}_1\| = \ldots = \|\vec{p}_n\| = 1$). Alors, par le lemme 2,

$$\vec{p}_i^T\vec{p}_j = \begin{cases} 1 & : \ i = j \\ 0 & : \ i \neq j \end{cases}$$

Posant $P = \left[\ \vec{p}_1 \ \ \ldots \ \ \vec{p}_n\ \right]$, on a ainsi $P^T P = I$.
D'autre part, $A\vec{p}_i = \lambda_i\vec{p}_i \ i = 1, \ldots, n$, ce qui s'écrit aussi $AP = P\Lambda$, soit

$$P^T AP = P^T P\Lambda = \Lambda$$

$\square$

Exemple.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Polynôme caractéristique :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$$

Valeurs propres : 0, 2 et 3.

Vecteurs propres : $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (orthogonaux deux à deux)

On norme les vecteurs propres pour former la matrice P

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

On vérifie que $P^T P = I$ et que, avec $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} P^T A P &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \Lambda \end{aligned}$$

Applications de la diagonalisation

Lemme. *Soit $A : n \times n$ diagonalisable avec les matrices P et Λ, c'est-à-dire $\Lambda = P^{-1}AP$. Alors, pour tout entier $k \geq 1$ on a*

$$A^k = P\Lambda^k P^{-1}$$

Pr. Par induction sur k :

– vrai pour $k = 1$ car $\Lambda = P^{-1}AP$ s'écrit aussi $A = P\Lambda P^{-1}$.

– si l'hypothèse est vraie pour $k-1$, elle l'est aussi pour k car $A^k = A^{k-1}A = \left(P\Lambda^{k-1}P^{-1}\right)\left(P\Lambda P^{-1}\right) = P\Lambda^k P^{-1}$.

□

Équations aux différences linéaires et homogènes

Étant donné une matrice de coefficients $A : n \times n$ et un vecteur $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ de conditions initiales, on considère le système homogène d'équations aux différences

$$\begin{aligned} \vec{x}_t &= A\vec{x}_{t-1}\,,\ t = 1, 2, \ldots \\ \vec{x}_0 &= \vec{c} \end{aligned}$$

Ce système a comme solution unique

$$\vec{x}_t = A^t \vec{c},\ t = 1, 2, \ldots$$

Si A est diagonalisable, cette solution s'écrit

$$\vec{x}_t = P\Lambda^t P^{-1}\vec{c},\ t = 1, 2, \ldots$$

Le comportement asymptotique de cette solution dépend des valeurs propres de A qu'on retrouve dans la matrice Λ.

Définition. *La solution du système homogène d'équations aux différences est asymptotiquement stable si*

$$\lim_{t\to\infty}(\vec{x}_t) = \vec{0}$$

quelles que soient les conditions initiales $\vec{x}_0 = \vec{c}$.

Théorème. *La solution du système homogène d'équations aux différences est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A (réelles ou complexes) ont module inférieur à 1.*
(Pour un nombre complexe $z = \alpha + i\beta$ le carré de son module est $|z|^2 = z\overline{z} = \alpha^2 + \beta^2$)